

**ГРЕБЕНКО Ю. А., СОЕ МИНН ТХУ
МЕТОД РАСЧЕТА ПО НЧ-ПРОТОТИПУ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ
НИЖНИХ ЧАСТОТ С ЛИНЕЙНЫМИ ФЧХ**

Гребенко Юрий Александрович

доктор технических наук,
заведующий кафедрой формирования и обработки радиосигналов,
Национальный исследовательский университет «Московский Энергетический
Институт»

E-mail: GrebenkoYA@mpei.ru

Сое Минн Тху

аспирант кафедры формирования и обработки радиосигналов,
Национальный исследовательский университет «Московский Энергетический
Институт»

E-mail: soeminnthu10@gmail.com

***Аннотация.** Цифровые вещественные КИХ-фильтры с линейной ФЧХ в большинстве случаев реализуются с помощью нерекурсивных структурных схем и имеют высокий порядок. Цифровые вещественные БИХ-фильтры с формой ФЧХ в полосе пропускания, близкой к линейной, рассчитываются с использованием НЧ-прототипов Бесселя, но форма АЧХ таких цифровых фильтров далека от прямоугольной. В работе предлагается метод расчета цифровых вещественных фильтров с близкой к линейной формой ФЧХ и близкой к прямоугольной формой АЧХ.*

***Ключевые слова:** цифровой вещественный фильтр с линейной ФЧХ, цифровой вещественный БИХ-фильтр, цифровой вещественный КИХ-фильтр, НЧ-прототип.*

**GREBENKO Y. A., SOE MINN THU
THE METHOD OF CALCULATION OF THE LF-PROTOTYPE DIGITAL LOW-
PASS FILTERS WITH LINEAR PHASE RESPONSE**

Grebenko Yuri Alexandrovich

Doctor of technical sciences,
Head of the department of formation and processing of radio signals,
National Research University "Moscow Power Engineering Institute"

E-mail: GrebenkoYA@mpei.ru

Soe Minn Thu

Post-graduate student of the department of formation and processing of radio signals,
National Research University "Moscow Power Engineering Institute"

E-mail: soeminnthu10@gmail.com

***Abstract.** Digital real FIR filters with linear phase response in most cases are implemented using non-recursive structural schemes and are of high order. Digital real IIR filters with the shape of the phase response in the passband, close to linear, computed using Bessel LF-prototypes, but the shape of the frequency response of such digital filters are far from rectangular. This paper proposes calculation method of real digital filters with nearly linear phase response and form close to the rectangular shape of frequency response.*

***Keywords:** real digital filter with linear phase response, real digital IIR filter, real digital FIR filter, LF-prototype.*

Введение. Цифровые фильтры можно разделить на два класса. Первый класс — это фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры). Такие фильтры реализуются в виде структурной схемы, содержащей обратные связи и обеспечивают высокую прямоугольность АЧХ при невысоком порядке фильтра. БИХ-фильтры можно рассчитать по НЧ-прототипам. Недостатком БИХ-фильтров является нелинейность ФЧХ.

Второй класс — это фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ фильтры). Эти фильтры имеют значительно более высокий порядок, чем БИХ фильтры, при реализации АЧХ с аналогичной прямоугольностью. Достоинством КИХ-фильтров является возможность получения линейной ФЧХ. Расчет КИХ-фильтров по НЧ-прототипам, при высоких требованиях к прямоугольности АЧХ, приводит к структурным схемам, имеющим нелинейные ФЧХ.

В статье предлагается способ расчета по НЧ-прототипу цифровых фильтров нижних частот с линейными ФЧХ.

Линеаризация ФЧХ КИХ фильтров

При расчете по НЧ-прототипу получаются КИХ-фильтры с заданной формой АЧХ, имеющие нелинейные ФЧХ. В такой ситуации может потребоваться линеаризация ФЧХ. Предлагаемый метод линеаризации ФЧХ предполагает последовательное (каскадное) соединение КИХ-фильтра с нелинейной ФЧХ с КИХ-фильтром, имеющим обратный порядок следования коэффициентов по сравнению с исходным. Такой фильтр будем называть обратным.

Поясним принцип линеаризации ФЧХ. Пусть передаточная функция КИХ фильтра с произвольными вещественными коэффициентами задана в следующем виде:

$T_1(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3})$, где a_0, a_1, a_2, a_3 - произвольные вещественные коэффициенты.

Определяем, частотную характеристику, делая замену переменной $z^{-1} = e^{-j\phi}$. Тогда:
 $T_1(e^{j\phi}) = (a_0 + a_1 e^{-j\phi} + a_2 e^{-j2\phi} + a_3 e^{-j3\phi})$.

Используя формулу Эйлера, $e^{-j\phi} = (\cos\phi - j\sin\phi)$, получим

$$T_1(e^{j\phi}) = A(\phi) - jB(\phi),$$

где $A(\phi) = (a_0 + (a_1 \cos\phi) + (a_2 \cos 2\phi) + (a_3 \cos 3\phi))$,

$$B(\phi) = ((a_1 \sin\phi) + (a_2 \sin 2\phi) + (a_3 \sin 3\phi)).$$

Определяем АЧХ и ФЧХ исходного КИХ-фильтра:

$$|T_1(e^{j\phi})| = \sqrt{(A(\phi))^2 + (B(\phi))^2}, \quad \arg(T_1(e^{j\phi})) = \arctg \left[\frac{-B(\phi)}{A(\phi)} \right]$$

Передаточная функция обратного фильтра будет иметь следующий вид:

$$T_2(z) = (a_3 + a_2 z^{-1} + a_1 z^{-2} + a_0 z^{-3}) = z^{-3} \cdot (a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3).$$

Определяем, частотную характеристику обратного фильтра, делая замену переменной $z^{-1} = e^{-j\phi}$. Тогда

$$T_2(e^{j\phi}) = (e^{-j3\phi}) \cdot (a_0 + a_1 e^{j\phi} + a_2 e^{j2\phi} + a_3 e^{j3\phi}).$$

Используя формулу Эйлера, $e^{j\phi} = (\cos\phi + j\sin\phi)$, преобразуем передаточную функцию обратного фильтра,

$$T_2(e^{j\phi}) = (e^{-j3\phi}) \cdot [A(\phi) + jB(\phi)],$$

где $A(\phi) = a_0 + a_1 \cos\phi + a_2 \cos 2\phi + a_3 \cos 3\phi$,

$$B(\phi) = a_1 \sin\phi + a_2 \sin 2\phi + a_3 \sin 3\phi.$$

Определяем АЧХ и ФЧХ обратного КИХ-фильтра:

$$|T_2(e^{j\phi})| = \sqrt{(A(\phi))^2 + (B(\phi))^2}, \quad \arg(T_2(e^{j\phi})) = -3\phi + \arctg \left[\frac{B(\phi)}{A(\phi)} \right]$$

Видно, что $|T_2(e^{j\phi})| = |T_1(e^{j\phi})|$.

При последовательном соединении прямого и обратного фильтров их АЧХ перемножаются, а ФЧХ суммируются:

$$|T(e^{j\phi})| = |T_1(e^{j\phi})| \cdot |T_2(e^{j\phi})| = |T_1(e^{j\phi})|^2$$

$$\arg(T(e^{j\phi})) = \arg(T_1(e^{j\phi})) + \arg(T_2(e^{j\phi})) = -\arctg\left[\frac{B}{A}\right] - 3\phi + \arctg\left[\frac{B}{A}\right] = -3\phi$$

Таким образом, можно констатировать, что ФЧХ каскадного соединения прямого и обратного фильтров в полосе пропускания становится линейной, общий порядок фильтра удваивается, а его АЧХ будет равна квадрату АЧХ исходного КИХ фильтра. Возможность линейризации ФЧХ произвольного КИХ-фильтра используем при расчете КИХ-фильтра по НЧ-прототипу.

Для иллюстрации метода рассмотрим пример расчета цифрового ФНЧ с использованием НЧ-прототипа Чебышева (инверсного) третьего порядка.

Исходные данные:

НЧ-прототип Чебышева (инверсного) третьего порядка в виде произведения сомножителей [2]:

$$T(s) = \frac{1}{(s + 1,134319)} \times \frac{s^2 + 5,97635763}{(s^2 + 0,93337s + 1,05874074)}$$

Параметры ФНЧ: $T_0 = 1$, нормированная полоса пропускания $w_n = 0,1$.

Методика расчета.

Используя метод обобщенного билинейного преобразования [1], рассчитываем ФНЧ с последовательной структурой. В нашем случае используется замена переменных следующего вида,

$$s = \gamma \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})}, \text{ где } \gamma = \text{ctg}(\pi w_n) = 3,07768354.$$

В результате подстановки получим произведение передаточных функций первого и второго порядка с вещественными коэффициентами.

$$T(z) = \frac{0,23741676 + 0,23741676z^{-1}}{1 - 0,46138731z^{-1}} \cdot \frac{1,15257211 - 0,52162194z^{-1} + 1,15257211z^{-2}}{1 - 1,25540327z^{-1} + 0,57136289z^{-2}}$$

Такой передаточной функции можно поставить в соответствие следующую модель в программе схемотехнического моделирования MicroCap-7,

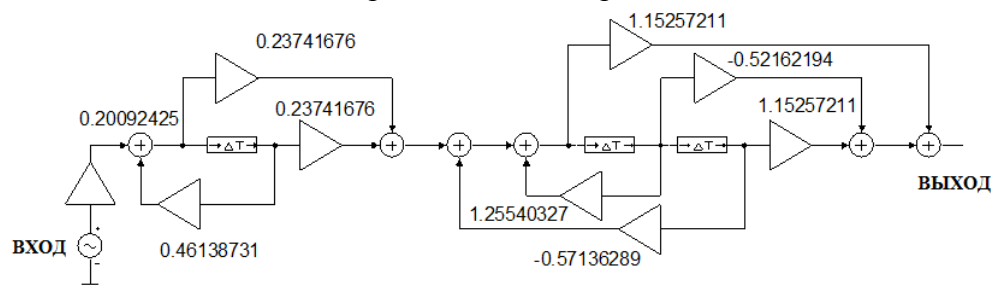


Рис.1. Структурная схема (модель) цифрового ФНЧ

Рассчитанная АЧХ такого цифрового БИХ фильтра (при интервале дискретизации равном 1 мсек) показана на рис.2.

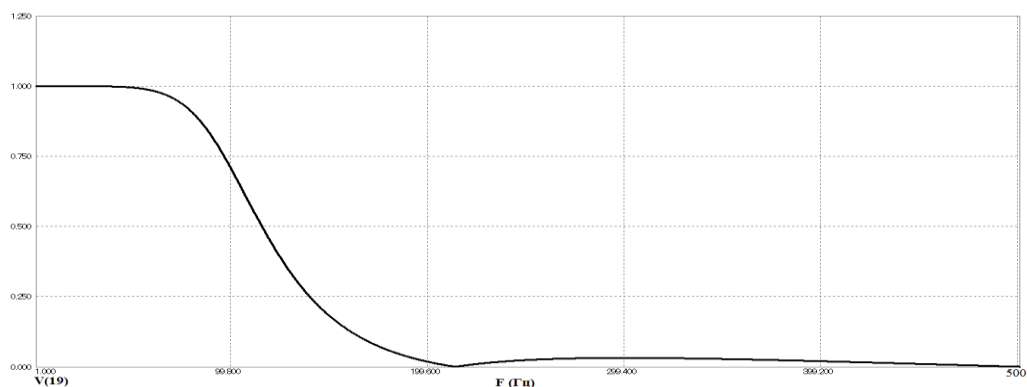


Рис.2. АЧХ цифрового БИХ ФНЧ

На рис.3. приведена зависимость группового времени запаздывания (ГВЗ) от частоты в полосе пропускания цифрового ФНЧ.

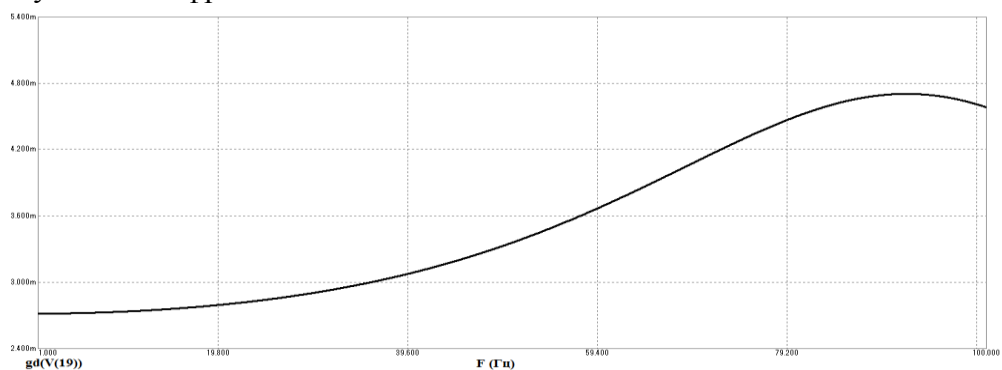


Рис.3. Зависимость ГВЗ от частоты в полосе пропускания БИХ ФНЧ

Неравномерность зависимости ГВЗ в полосе пропускания будем оценивать по разности максимального и минимального значения ГВЗ. Для такого цифрового БИХ-фильтра эта разность равна 1.989 мсек.

С помощью моделирования находим импульсную характеристику цифрового БИХ ФНЧ. Она показана на рис.4.

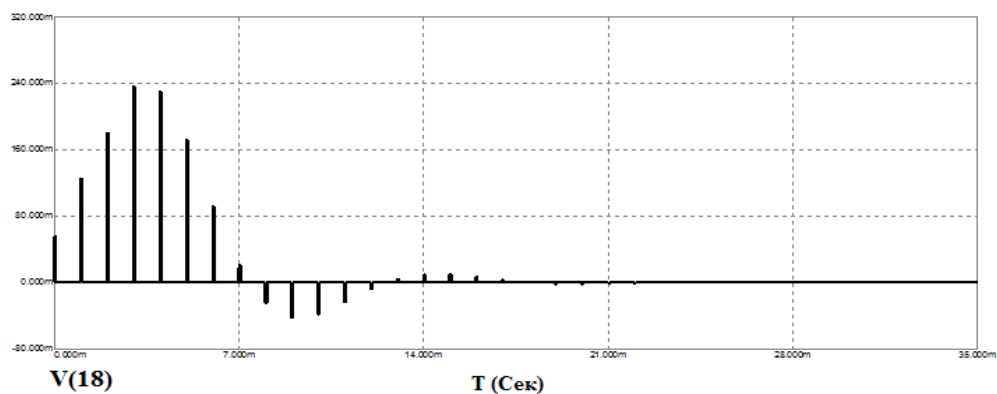


Рис.4. Импульсная характеристика цифрового БИХ ФНЧ

Усекаем импульсную характеристику, отбрасывая отсчеты, значения которых не превосходят по модулю 0,01. Таких отсчетов осталось 35. Реализуем КИХ фильтр, коэффициенты которого совпадают с отсчетами импульсной характеристики. Модель такого КИХ фильтра показана на рис.5.

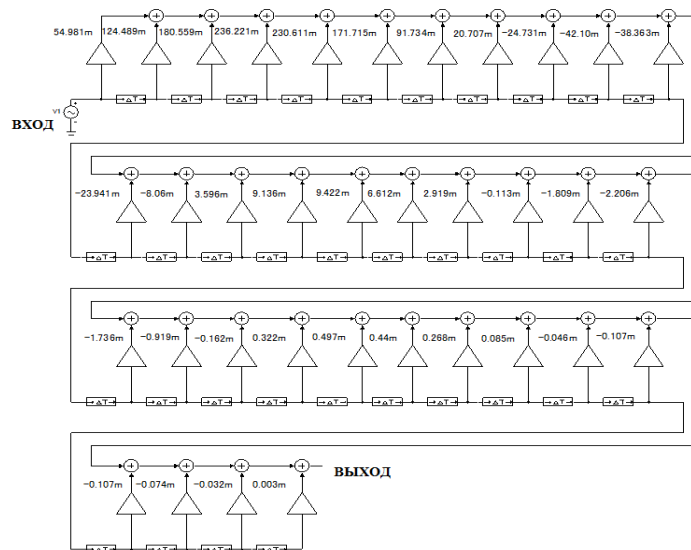


Рис.5. Структурная схема КИХ- фильтра нижних частот
 Рассчитанная АЧХ такого КИХ-фильтра показана на рис.6.

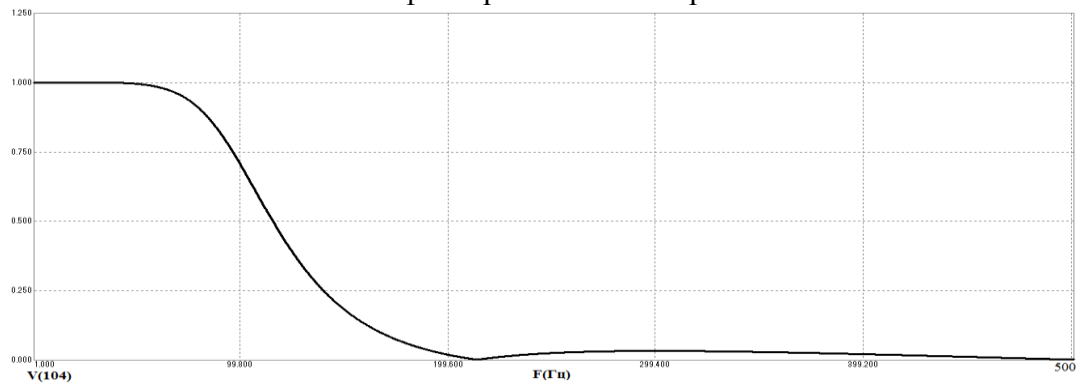


Рис.6. АЧХ КИХ ФНЧ

Неравномерность зависимости ГВЗ от частоты в полосе пропускания КИХ ФНЧ показана на рис.7.

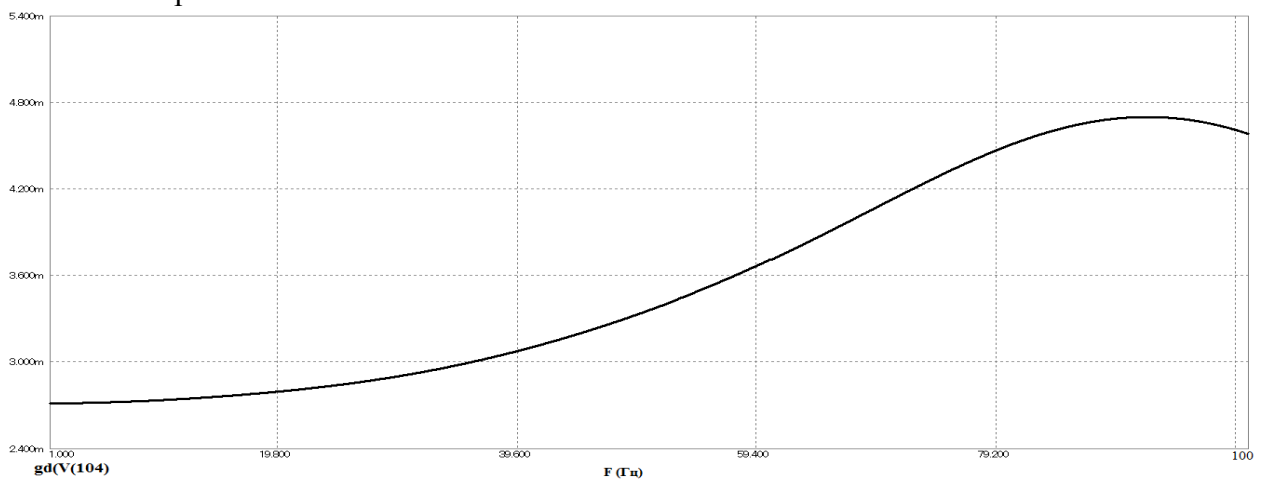


Рис.7. Зависимость ГВЗ от частоты в полосе пропускания КИХ ФНЧ

Отметим, что полученная АЧХ практически совпадает с АЧХ исходного БИХ-фильтра, а ГВЗ в полосе пропускания имеет заметную неравномерность. Разность максимального и минимального значения ГВЗ составляет 1,989 мсек.

Можно реализовать обратный КИХ-фильтр и использовать его для линейризации ФЧХ. Рассчитанная АЧХ обратного КИХ-фильтра приведена на рис.8.

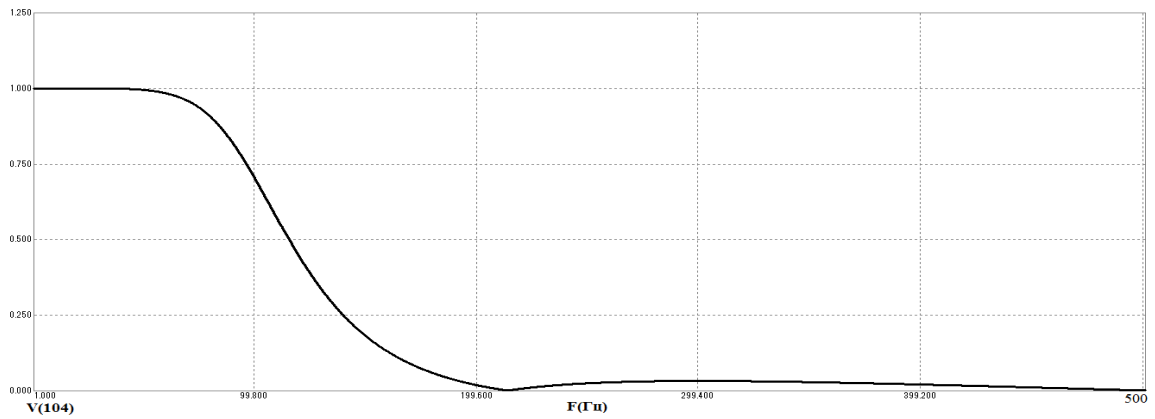


Рис.8. АЧХ обратного КИХ ФНЧ

Неравномерность зависимости ГВЗ от частоты в полосе пропускания для обратного фильтра показана на рис.9.

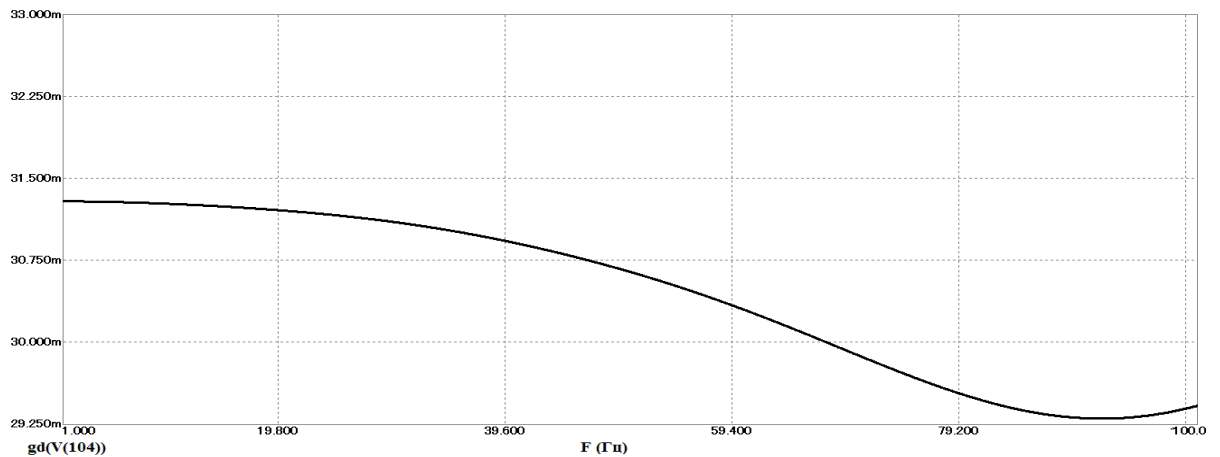


Рис.9. Зависимость ГВЗ от частоты в полосе пропускания обратного КИХ ФНЧ

Можно констатировать, что АЧХ обратного КИХ-фильтра совпадает с АЧХ прямого КИХ-фильтра. Разность максимального и минимального значения ГВЗ в полосе пропускания составляет 1,989 мсек.

АЧХ, ФЧХ и ГВЗ для последовательного соединения прямого и обратного КИХ-фильтров приведены на рис.10.

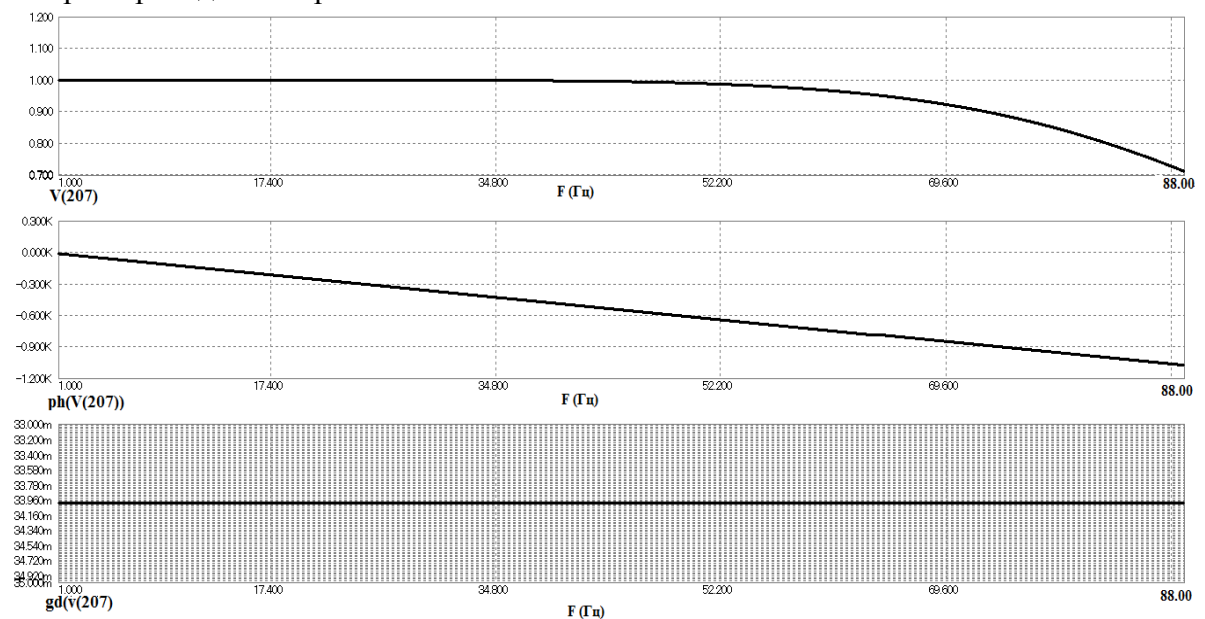


Рис.10. АЧХ, ФЧХ и ГВЗ последовательного соединения КИХ ФНЧ и обратного КИХ ФНЧ

Из графиков видно, что ФЧХ стала линейной, а ГВЗ имеет постоянное значение в полосе пропускания.

Для уменьшения количества арифметических операций и элементов задержки, соединим последовательно БИХ-фильтр нижних частот и обратный КИХ-фильтр. В этом случае мы не получим идеальную линейную ФЧХ, но эффект линейризации должен проявиться. Рассмотрим эффективность линейризации при последовательном соединении БИХ-фильтра и линейризирующего КИХ-фильтра. АЧХ, ФЧХ и ГВЗ для их последовательного соединения приведены на рис.11.

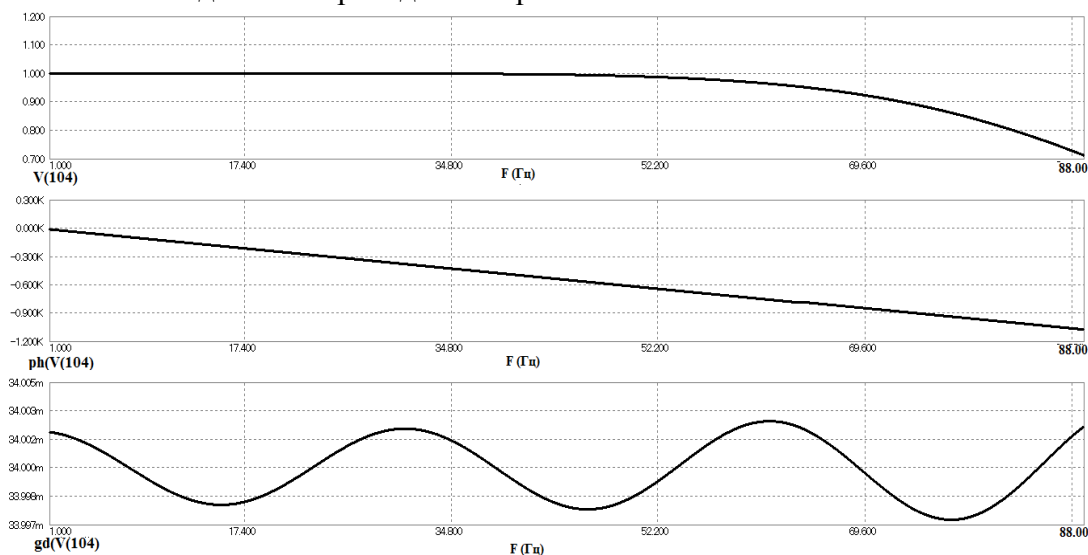


Рис.11. АЧХ, ФЧХ и ГВЗ последовательного соединения БИХ ФНЧ и обратного КИХ ФНЧ

Максимальная разность значений ГВЗ в полосе пропускания после линейризации составляет 0,006 мсек, что в 400 раз меньше чем аналогичная разность у исходного БИХ-фильтра.

Выводы. Метод линейризации ФЧХ КИХ-фильтров предполагает последовательное соединение КИХ-фильтра с нелинейной ФЧХ с КИХ-фильтром, имеющим обратный порядок следования коэффициентов по сравнению с исходным. ФЧХ каскадного соединения прямого и обратного КИХ-фильтров становится линейной, общий порядок фильтра удваивается, а его АЧХ будет равна квадрату АЧХ исходного КИХ фильтра.

Для уменьшения порядка передаточной функции фильтров с линейной ФЧХ целесообразно использовать последовательное соединение БИХ-фильтра с нелинейной ФЧХ с обратным КИХ-фильтром. ФЧХ каскадного соединения БИХ-фильтра и обратного КИХ-фильтра близка к линейной, а его АЧХ равна квадрату АЧХ исходного БИХ фильтра. Это каскадное соединение при реализации требует меньшего количества памяти и меньшего количества операций умножения и суммирования, чем каскадное соединение прямого и обратного КИХ-фильтров.

Список литературы

1. Гребенко Ю.А. Методы цифровой обработки сигналов в радиоприемных устройствах // М.: Издательский дом МЭИ, 2006. - 48с.
2. Ланнэ А.А. Расчет и проектирование линейных аналоговых АРС-устройств: Пособие по курсовому и дипломному проектированию // ВАС, 1980. - 230с.